**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Гомологическая алгебра

Homological Algebra

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 2

Регистрационный номер рабочей программы: 001244

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Обучение обучающихся основным методам гомологической алгебры; развитие у обучающихся навыков применения освоенных методов в других математических дисциплинах, формирование навыков работы с основными инструментами гомологической алгебры.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Для успешного освоения дисциплины обучающийся должен иметь подготовку по основным математическим дисциплинам, изучаемым на 1-4 курсах, прежде всего – по основному куру алгебры и теории чисел.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Обучающийся должен знать содержание дисциплины «Гомологическая алгебра» и иметь достаточно полное представление о возможностях применения её разделов в других областях математики; иметь представление об универсальных и коуниверсальных квадратах, длинных когомологических последовательностях, классических производных функторах, когомологиях и их приложениях.

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

В качестве основных форм аудиторной работы в рамках курса в седьмом семестре предполагается проведение практических занятий (30 часов) и самостоятельная работа в присутствии преподавателя (30 часов), которые представляют подробное изучение материала по соответствующим темам дисциплины.

Практические занятия подразумевают решение различных задач по темам курса. Самостоятельная работа, помимо решения задач, подразумевает подробное изучение теоретического материала по соответствующим темам дисциплины с использованием источников из списков основной и дополнительной литературы к курсу.

Объём занятий в активных и интерактивных формах - 30 часов. Промежуточная аттестация: экзамен в 7 семестре 4 курса.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 7 |  |  | 2 | 30 |  |  |  |  | 2 |  |  | 30 |  |  | 8 |  | 30 | 2 |
|  |  |  | 1-30 | 1-30 |  |  |  |  | 1-30 |  |  | 1-30 |  |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО |  |  | 2 | 30 |  |  |  |  | 2 |  |  | 30 |  |  | 8 |  |  | 2 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 7 |  |  | экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

**ЧАСТЬ 1. НЕКОТОРЫЕ КОНСТРУКЦИИ В КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ** (8 часов).

Универсальные конструкции: прямые суммы и прямые произведения, универсальные и коуниверсальные квадраты, точные квадраты. Лемма о двух квадратах. Группы расширений. Длинная точная Ext-последовательность. Гомологические размерности: проективная и инъективная размерности модулей. Глобальная размерность кольца.

**ЧАСТЬ 2. КАТЕГОРИЯ КОМПЛЕКСОВ** (10 часов)

Коцепные комплексы и коцепные отображения, ядра и коядра коцепных отображений. Отношение гомотопии для коцепных отображений. Конструкция гомотопической категории комплексов. Когомологии комплексов. Конус и цилиндр коцепного отображения. Длинная точная когомологическая последовательность (два варианта: а) с использованием конуса морфизма, б) индуцированная короткой точной последовательностью комплексов). Лемма о змее, 3x 3-лемма. “Морфизм” длинных когомологических последовательностей, индуцированный морфизмом коротких точных последовательностей. Квазиизоморфизмы и ацикличные комплексы. Резольвенты комплексов; теоремы сравнения для резольвент. Бикомплексы. Теорема о когомологиях тотализации “почти-ацикличного” бикомплекса; приложение к функторам Ext*n*.

**ЧАСТЬ 3. ПРОИЗВОДНЫЕ КАТЕГОРИИ** (12 часов)

Триангулированные категории, простейшие следствия аксиом триангулированной категории. Структура триангулированной категории на гомотопической категории комплексов. Исчисление частные (для категорий). Локализация триангулированных категорий. Биекция между толстыми триагулированными подкатегориями триангулированной категории и насыщенными локализующими классами морфизмов, совместимыми с триангуляцией. Производная категория как локализация гомотопической категории. Группы морфизмов в производной категории и группы Ext*n*(*A*,*C*). Произведение Йонеды и композиция морфизмов в производной категории. *AR-*треугольники. Определение и конструкция производных функторов. Классические производные функторы. Понятие спектральной последовательности. Спектральная последовательность фильтрованного комплекса. Спектральная последовательность бикомплекса. Спектральная последовательность Хохшильда–Серра.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

По данному курсу предусмотрены проведение практических занятий и организация самостоятельной работы в присутствии преподавателя. Предполагается, что читают лекции и организуют самостоятельную работу преподаватели, имеющие опыт проведения занятий в рамках общего курса алгебры и теории чисел на 1-2 курсах и чтения вариативных курсов.  
Успешное освоение дисциплины возможно благодаря посещению практических занятий, участию в решении задач, активному участию обучающихся в обсуждении рассматриваемых вопросов, самостоятельной работе, включающей в себя чтение рекомендованной литературы.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Самостоятельная работа обучающихся в рамках данной дисциплины является важным компонентом обучения. Настоящей программой предусмотрены формы самостоятельной работы в присутствии преподавателя. Кроме материалов курса для самостоятельной работы используются также источники, указанные в списках обязательной и дополнительной литературы.

Перечень примерных вопросов для самостоятельной работы обучающихся:

1. Пределы (копределы) функторов

2. Группы Extn(A,C) в различных частных случаях.

3. Группы Torn(A,C).

4. 3x3-лемма, 5-лемма.

5. Ядра и коядра в категории комплексов.

6. Цилиндр цепного отображения как конус.

7. Проективные резольвенты комплексов, ограниченных сверху.

8. Простейшие свойства предтриангулированных категорий, логическая зависимость «стандартных» аксиом триангулированной категории.

9. Частные случаи спектральных последовательностей, примеры применения.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

В течение учебного года по дисциплине проводятся практические занятия с выступлениями обучающихся, предлагаются темы и источники для самостоятельной работы, проводятся контрольные работы и/или выдаются обязательные, как правило, индивидуальные задания.

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

***Методика проведения экзамена***

Экзамен проводится в устно-письменной форме, оценка выставляется с учётом текущего контроля результатов работы обучающегося в течение семестра.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена не разрешается. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт, и обучающийся удаляется с экзамена.

Обучающемуся необходимо решить задачи по каждой из тем контрольных работ и обязательных домашних заданий и, при необходимости, ответить на дополнительные (в том числе – и теоретические) вопросы. При наличии нерешенных заданий, обучающемуся предоставляется возможность решить аналогичную по тематике задачу во время проведения зачета. При необходимости преподаватель может задать дополнительные вопросы, как про ходу решения конкретной задачи, так и по темам курса в целом.

*Критерии выставления оценки за экзамен:*

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся самостоятельно решил все предложенные задачи и правильно ответил на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка «хорошо» ставится за решение всех предложенных задач (возможно, с помощью подсказок преподавателя) и правильные ответы на большинство дополнительных вопросов преподавателя.

Оценка «удовлетворительно» ставится за умение решать основные типы задач по каждой теме (частично с помощью подсказок преподавателя) и отвечать на дополнительные вопросы, касающихся этих задач.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

**Примерный перечень тем для задач и вопросов к экзамену по курсу**

1. Прямые суммы и прямые произведения в категории модулей.
2. Универсальные и коуниверсальные квадраты. Лемма о двух квадратах.
3. Построение группы расширений Ext1(*A*,*C*).
4. Теорема о точной Ext-последовательности.
5. Проективная и инъективная размерности модуля.
6. Глобальная размерность кольца. Наследственные кольца.
7. Конус и цилиндр цепного отображения.
8. Длинная когомологическая последовательность, индуцированная цепным отображением.
9. Длинная когомологическая последовательность, индуцированная короткой точной последовательностью комплексов.
10. Следствия теоремы о длинной когомологической последовательности: 3x 3-лемма, лемма о змее.
11. Построение инъективной резольвенты ограниченного снизу комплекса.
12. Теоремы сравнения для резольвент.
13. Теорема о когомологиях тотализации “почти-ацикличного” бикомплекса; приложение к функторам Ext*n*.
14. Понятие триангулированной категории, простейшие свойства.
15. Структура триангулированной категории на гомотопической категории.
16. Локализация триангулированных категорий.
17. Насыщенные триангулированные подкатегории, критерий Рикарда.
18. Структура производной категории.
19. *AR-*треугольники над алгебрами конечной глобальной размерности.
20. Определение и конструкция производных функторов.
21. Спектральная последовательность фильтрованного комплекса.
22. Спектральная последовательность бикомплекса.
23. Спектральная последовательность Хохшильда–Серра.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Оценка обучающимися содержания и качества учебного процесса по дисциплине осуществляется в установленном в СПбГУ порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций и организации самостоятельной работы привлекаются преподаватели, имеющие базовое образование и/или ученую степень, соответствующую профилю преподаваемой дисциплины.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не требуется.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Требуются стандартно оборудованные лекционные аудитории (доска, мел, губка, маркер).

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Стандартно оборудованные аудитории для проведения занятий.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не требуется.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не требуется.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел или цветные фломастеры, губки; бумага формата А4, канцелярские товары, картриджи принтеров – в объеме, необходимом для проведения занятий, по заявкам преподавателей.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Гельфанд С. И., Манин Ю. И. Методы гомологической алгебры. Том I. - М.: Наука, 1988.

2. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. - М.: Изд-во ИЛ, 1960.

3. Маклейн С. Гомология. - М.: Мир, 1966-2000.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Бурбаки Н. Гомологическая алгебра. - М.: Мир,1987.

2. Weibel C. A. An introduction to homological algebra. Cambridge, 1994. – ЭР по подписке СПбГУ: <http://proxy.library.spbu.ru:2125/ehost/detail/detail?vid=0&sid=d9d2f867-69a5-4293-8b65-9833a3e7f74d%40sessionmgr103&bdata=JkF1dGhUeXBlPWlwJmxhbmc9cnU%3d#db=nlebk&AN=511003>.

3. Rotman J. An introduction to homological algebra. Second edition, Springer, 2009. – ЭР по подписке СПбГУ: https://proxy.library.spbu.ru:2096/book/10.1007%2Fb98977.

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

Не предусмотрено.

**Раздел 4. Разработчики программы**

Генералов Александр Иванович, профессор, д.ф.-м.н., кафедра высшей алгебры и теории чисел.